Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

Vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von
Rickleff Brübach
aus Kahl/Main

Marburg/Lahn 1973

Fotodruck E. Symon · 355 Marburg/Lahn · Friedrichstr. 3

Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

Vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von
Rickleff Brübach
aus Kahl/Main

Marburg/Lahn 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vom Fachbereich Mathematik der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am:	19. 9. 1973
Tag der mündlichen Prüfung:	2. 10. 1973
Berichterstatter:	Prof. Dr. Avakumović
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. Eberhard

Inhaltsverzeichnis

§1	Einleitung	1
§2	Beweis des Satzes 1	8
§3	Eine Grundlösung	23
§4	Die exponentielle Abschätzung	26
§5	Beweis von Satz 3	31
§6	Der Taubersatz	34
Literaturverzeichnis		40

§ 1 Einleitung

In einem beschränkten Gebiet G des R^n betrachten wir einen symmetrischen Differentialausdruck $A(D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha D^\alpha$, wobei a_α N x N Matrizen mit konstanten Gliedern sind und $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{\partial}{i \partial x_j}$, wie üblich definiert ist. Wir setzen voraus, daß A(D) p-elliptisch ist sowie eine selbstadjungierte halbbeschränkte Erweiterung $\tilde{A}$ hat (s. Seite 5 ff).

Wir bezeichnen mit λ_k, k=1,2,.... , die Eigenwerte und mit $u_k = u_k(x)$ die Eigenvektorfunktionen des Problems $(\tilde{A} - \lambda_k E) u_k = 0$ und untersuchen das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion $e(x,x;t) = \sum_{\lambda_k < t} u_k(x) \overline{u_k^*(x)}$ (mit * bezeichnen wir den transponierten Vektor), $t>0$, $x \in G$.

Falls man kein System von Differentialoperatoren betrachtet, ist diese Frage, aufgeworfen durch die grundlegende Arbeit von Carleman [7], schrittweise beantwortet worden. Für einen elliptischen Differentialoperator 2m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bewies Garding [9] für die Spektralfunktion e(x,x;t)

$$(1) \qquad e(x,x;t) = C\, t^{\frac{n}{2m}} + O_x(t^{\frac{n-1}{2m}}) \quad ,$$

nachdem Avakumović [3] dieses Ergebnis für Differentialoperatoren 2-ter Ordnung gezeigt hatte und darüberhinaus feststellte, daß eine bessere Abschätzung i. A. nicht möglich ist [4]. Hörmander brachte 1968 diesen Fragenkreis zu einem Abschluß, als er für einen beliebigen elliptischen Differentialoperator (1) beweisen konnte [12] .

Bei der Behandlung elliptischer Systeme ergaben sich unerwartete Schwierigkeiten. Gromes konnte in [11] die obige Formel für ein System 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten nur unter einer bestimmten Voraussetzung an die Eigenwerte $a_k^0(z)$ des Hauptteiles $\mathcal{A}^0(z) = \sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha z^\alpha$ beweisen. Auch Hörmander [12] beschränkt sich auf Systeme, bei denen die Eigenwerte des Hauptteiles einfach sind.

In der vorliegenden Arbeit konnte nun bewiesen werden, daß bei Systemen mit konstanten Koeffizienten auf die Bedingungen an die Eigenwerte verzichtet werden kann und (1) für ein allgemeines System elliptischer Differentialoperatoren gilt.

Die Beweismethode lehnt sich an die von Avakumovic bzw. Gromes an. Wir vergleichen die Green'sche Funktion des zugehörigen parabolischen Problems mit der Grundlösung des Systems $\left\{A(D) + \frac{\partial}{\partial t}\right\}$, die sich beide als Laplace-Stieltjes Integrale darstellen lassen. Wesentlich für die weiteren Beweisschritte ist die Abschätzung der inversen Laplacetransformation der Grundlösung. Diese liefert Satz 1, der deshalb von grundlegender Bedeutung für alle weiteren Ergebnisse ist.

Formulieren wir nun diese Ergebnisse etwas genauer. Dazu betrachten wir die hermiteschen Matrizen $\mathcal{A}(z) := \sum_{|\alpha|\leq 2m} A_\alpha z^\alpha$ und $\mathcal{A}^0(z) := \sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha z^\alpha$ mit den Eigenwerten $a_k(z)$ bzw. $a_k^0(z)$, $k = 1,\ldots, N$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(z) = \left(\mathfrak{m}_1(z),\ldots,\mathfrak{m}_N(z)\right) = \mathfrak{M}_{ik}(z)$ bzw. $\mathcal{M}^0(z) = \left(\mathfrak{m}_1^0(z),\ldots,\mathfrak{m}_N^0(z)\right) = \mathfrak{M}_{ik}^0(z)$ die unitären Matrizen, die $\mathcal{A}(z)$ bzw. $\mathcal{A}^0(z)$ auf Diagonalgestalt transformieren und

deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren sind, so lautet Satz 1.

Satz 1

Für $u>0$, $1\leq i\leq N$ gilt

$$(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{a_k(z)\leq u}\left|\mathfrak{M}_{ik}(z)\right|^2dz-\int_{a_k^0(z)\leq u}\left|\mathfrak{M}_{ik}^0(z)\right|^2dz\right)\right|\leq Cu^{\frac{n-1}{2m}}$$

Die Konstante C hängt nur von den Eigenschaften des Systems ab.

In Satz 2 leiten wir die für die spätere Anwendung eines Taubersatzes von Avakumovic [5] notwendige exponentielle Abschätzung der Differenz der Green'schen Funktion und Grundlösung her.

Satz 2

Für $y\in G$, $0<s-t<C\ 1(y)^{2m}$ gilt

$$\left|\int_0^\infty e^{-(s-t)u}\,d\{(y,y;u)-\int_0^\infty e^{-(s-t)u}\,d\left[(2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k(z)\leq u}\left|\mathfrak{M}_{ik}(z)\right|^2dz\right]\right|$$

$$\leq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}}\ e^{-C\,1(y)^{\frac{2m}{2m-1}}}\,(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}$$

Die Konstanten hängen nur von dem System ab.

Auf Grund der Aussage von Satz 1:

$$(2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k(z)\leq u}\left|\mathfrak{M}_{ik}(z)\right|^2dz=K_1\,u^{\frac{n}{2m}}+O(u^{\frac{n-1}{2m}})$$

und mit Hilfe des schon erwähnten Taubersatzes können wir

dann leicht das gewünschte Ergebnis für die Spektralmatrixfunktion beweisen.

Satz 3

Für die Diagonalglieder der Spektralmatrixfunktion $\mathfrak{E}(y,y;u) = \sum_{\lambda_k \le u} \eta_k(y)\,\overline{\eta_k^*(y)}$ gelten für $i = 1,2,\dots,N$, $u \ge u_o$ die Abschätzungen

$$\left| \mathfrak{E}_{ii}(y,y;u) - K_1\, u^{\frac{n}{2m}} \right| \le \frac{C}{I(y)}\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

Dabei ist $K_1 := (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k^o(z) \le 1} |m_{ik}^o(z)|^2\, dz$ und C hängt nur von dem System ab.

Als Folgerung dieses Satzes ergibt sich auf bekannte Weise [4], [11] eine Abschätzung der Anzahlfunktion.

Satz 4

Das Gebiet G besitze die gewöhnliche Kegeleigenschaft und der Rand von G habe endliches Minkowsky-Maß. Das Volumen von G sei mit V(G) bezeichnet. Dann genügt für $u > u_1$ die Anzahlfunktion unseres Problems der Abschätzung

$$\left| N(u) - K_1\, V(G)\, u^{\frac{n}{2m}} \right| \le C\, u^{\frac{n-1}{2m}} \log u \quad ,$$

wobei $N(u) := \sum_{\lambda_k \le u} 1$.

1.2.

Wir wollen noch einige Bezeichnungen und Definitionen einführen, die wir benutzen werden. Es bezeichnen $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, R^n den n-dimensionalen Euklidischen Raum und R_+^1 die Menge $R_+^1 := \{x \in R^1 \mid x > 0\}$. Für $x, y \in R^n$, $x = (x_1, .., x_n)$,

$y=(y_1,..,y_n)$ sei durch $(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ ein Skalarprodukt im R^n definiert und $|x|$ die sich daraus ergebende Norm. Den Rand unseres beschränkten Gebietes bezeichnen wir mit δG, den Abschluß mit $\overline{G}$. Für $y\in G$ sei $l(y) := \min(1, \operatorname{dist}(y,\delta G))$ und für hinreichend kleines $\varrho\in R_+^1$ $G_\varrho := \{y\in G \mid l(y) \geq \varrho\}$. Mit kleinen deutschen Buchstaben $\breve{u}(x), \breve{w}(x)$, .. bezeichnen wir stets N-fache Spaltenvektoren, mit $\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x),...$ Matrixfunktionen und die Komponenten mit $\breve{u}_j(x)$ bzw. $\mathfrak{A}_{ij}(x)$. Operationen mit Vektoren und Matrizen z.B. Differentiation oder $\breve{u}(x) \in C_o^\infty(G)$ sind, solange nichts anderes gesagt wird, komponentenweise zu verstehen. Dabei sind die Räume C^∞, C_o^∞, L^2 wie üblich, das Skalarprodukt $(\mathfrak{f},\mathfrak{g})$, $\mathfrak{f},\mathfrak{g}\in L^2$ durch $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) := \int_G \mathfrak{f}^*(x)\,\overline{\mathfrak{g}(x)}\,dx$ definiert, wobei $\mathfrak{f}^*$ den transponierten Vektor zu $\mathfrak{f}$, $\overline{\mathfrak{g}}$ den konjugiert komplexen zu $\mathfrak{g}$ bezeichnen. Für eine Matrix $\mathfrak{A}$ sei $\|\mathfrak{A}\|$ eine mit $\|\breve{w}\|$ verträgliche Matrizennorm. $\mathfrak{I}$ bedeute die Einheitsmatrix. Die Konstanten C sind positiv und hängen nur von den Koeffizienten des Systems ab.

1.3.

Es sei $x = (x_1,..,x_n)$ ein beliebiger Punkt des R^n. Wir verwenden die Bezeichnungen $D_j := -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,...,n$. Weiterhin sei $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ und der Differentialausdruck D^α durch $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}....D_n^{\alpha_n}$ definiert. Für $s\in\mathbb{N}$ sei das System von Gleichungen gegeben

$$(2) \qquad A(D)\breve{u}(x) = \sum_{|\alpha|\leq s} \mathfrak{A}_\alpha D^\alpha \breve{u}(x) = \mathfrak{f}(x) \quad .$$

Definition

Für $z\in R^n$ bezeichnen $a_1^\circ(z),...,a_N^\circ(z)$ die Eigenwerte der

Matrix $a_0^0(z) := \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha z^\alpha$. Der Differentialausdruck A(D) heißt p-elliptisch, wenn für $|z| = 1$ $\operatorname{Re} a_j^0(z) > 0$, $j=1,\dots,N$, gilt.

Der in (2) eingeführte Differentialausdruck **A** erfülle nun die folgenden Voraussetzungen:

(3) A sei p-elliptisch. Es ist bekannt, daß in diesem Fall s gerade sein muß, s = 2m.

(4) A sei formal selbstadjungiert, d.h. für $f, g \in C_0^\infty(G)$ gelte $(Af, g) = (f, Ag)$.

(5) A habe eine halbbeschränkte o.B.d.A. positive selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ mit den folgenden Eigenschaften: $\tilde{A}$ habe abzählbar viele Eigenwerte, und es existiere der eindeutige inverse Operator (Green'sche Operator) von $A + \frac{\partial}{\partial s}$ und ist ein Integraloperator. Sein Kern $g(x,y;s,t)$ ist stetig für $s-t>0$ und genügt für $x,y \in G$, $0<s-t<T$ der Abschätzung

(6) $$\left| g(x,y;s,t) \right| \leq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}} \exp\left[-\delta \left(\frac{|x-y|}{(s-t)^{\frac{1}{2m}}} \right)^{\frac{2m}{2m-1}} \right]$$

Dabei hängt C nur von T ab.

Es ist bekannt, daß die unter (5) aufgeführten Bedingungen erfüllt sind, wenn wir als selbstadjungierte Erweiterung ein selbstadjungiertes p-elliptisches Randwertproblem $(A + \frac{\partial}{\partial s}, B)$ mit den Randdifferentialoperatoren B wählen (siehe dazu [10], [2], [13]).

Auf Grund unserer Voraussetzungen können wir den Kern $g(x,y;s,t)$ in eine Reihe entwickeln [10] .

Bezeichnen λ_k, φ_k die Eigenwerte bzw. die orthonormierten

Eigenvektorfunktionen von $\tilde{A}$, so gilt für $s-t>0$

$$(7) \qquad g(x,y;s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(s-t)\lambda_k} \eta_k(x) \overline{\eta_k^*(y)} \quad .$$

§ 2 Beweis des Satzes 1

Wir erinnern an die in der Einleitung eingeführten Bezeichnungen $\mathfrak{M}(z)$ und $\mathfrak{M}^0(z)$ für die unitären Matrizen, die $\mathfrak{A}(z)$ bzw. $\mathfrak{A}^0(z)$, $z \in R^n$, auf Diagonalgestalt transformieren. Die der Größe nach geordneten Eigenwerte von $\mathfrak{A}(z)$ sind $a_k(z)$, die von $\mathfrak{A}^0(z)$ $a_k^0(z)$.

Satz 1

Für $u \in R_+^1$, $1 \leq i \leq N$ gilt

$$(2\pi)^{-n} \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz - \int_{a_k^0(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2 dz \right| \leq C\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

Die Konstante C hängt nur vom System ab.

Beweis:

Satz 1 ergibt sich unmittelbar aus den folgenden zwei Hilfssätzen. Mit den Voraussetzungen von Satz 1 gilt

Hilfssatz 1.1.

$$(2\pi)^{-n} \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz - \int_{a_k^0(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz \right| \leq C\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

und

Hilfssatz 1.2.

$$(2\pi)^{-n} \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k^0(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz - \int_{a_k^0(z) \leq u} |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2 dz \right| \leq C\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

Beweis von Hilfssatz 1.1.

Wir bezeichnen mit Ω den n-dimensionalen Einheitskreis und führen Polarkoordinaten $z = r\omega$ ein, wobei $|z| = r$ ist, und definieren $d\omega > 0$ durch $dz = r^{n-1} dr\, d\omega$. Die Eigenwerte des Hauptteiles $A^0(\omega)$ bezeichnen wir mit $a_k^0(\omega)$.

Für festes $\omega \in \Omega$ seien die $a_k^0(\omega)$ bzw. $a_k(r\omega)$ wie folgt geordnet

$$(8) \qquad \begin{aligned} &a_1^0(\omega) \le a_2^0(\omega) \le \dots \le a_N^0(\omega) \\ &a_1(r\omega) \le a_2(r\omega) \le \dots \le a_N(r\omega) \quad \text{für } r \in [0,\infty) \end{aligned}$$

Dann gilt für $1 \le k \le N$

$$(9) \qquad \left| a_k(r\omega) - r^{2m}\, a_k^0(\omega) \right| \le C_4 (r^{2m-1} + 1)$$

Der Beweis für (9) mit der Min.- Max. Eigenschaft der Eigenwerte und zwar gilt

$$\left| a_k(r\omega) - r^{2m}\, a_k^0(\omega) \right| \le \| A - A^0 \| \le C_4 (r^{2m-1} + 1).$$

Dabei ist C selbstverständlich unabhängig von $\omega \in \Omega$.

Mit Hilfe der Ungleichung (9) können wir nun Hilfssatz 1.1. leicht beweisen.

$$\left| (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{a_k(z) \le v^{2m}} |m_{ik}(z)|^2 dz - \int_{a_k^0(z) \le v^{2m}} |m_{ik}(z)|^2 dz \right) \right| =$$

$$= (2\pi)^{-n} \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} d\omega \left(\int_{a_k(r\omega) \le v^{2m}} |m_{ik}(r\omega)|^2 r^{n-1} dr - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_{r^{2m} a_k^0(\omega) \le v^{2m}} |m_{ik}(r\omega)|^2 r^{n-1} dr \right) \right|$$

$=: B(v)$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1 : $v \geq C_4^{\frac{1}{2m}} + C_4 \max_k \max_{\omega \in \Omega} a_k^o(\omega)^{\frac{1-2m}{2m}} =: v_o$

Aus (9) und der Beziehung

$$(10)\quad I_k(\omega,v) := \left\{ r>0 \;\middle|\; v^{2m}-C_4 r^{2m-1}-C_4 \leq a_k^o(\omega)\, r^{2m} \leq v^{2m}+C_4 r^{2m-1}+C_4 \right\}$$

folgt

$$B(v) \leq \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_\Omega d\omega \int_{I_k(\omega,v)} |\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2\, r^{n-1}\, dr$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_\Omega d\omega \int_{I_k(\omega,v)} r^{n-1}\, dr$$

Wir schätzen das letzte Integral ab, indem wir den Integrationsweg vergrößern. Dazu bezeichnen wir die rechte bzw. linke Grenze von $I_k(\omega,v)$ mit r_{k1} bzw. r_{k2}, d.h. für alle $r \in I_k(\omega,v)$ gilt

$$(11)\quad r_{k1} \leq r \leq r_{k2}$$

Aus (10) ergibt sich damit $v \leq a_k^o(\omega)^{\frac{1}{2m}} r_{k2}$ und $a_k^o(\omega)^{\frac{1}{2m}} r_{k1} \leq v$, und wegen (11), (10) und $v \geq C_4^{\frac{1}{2m}}$ gilt darüberhinaus

$$r_{k1} = a_k^o(\omega)^{-1} (v r_{k1}^{-1})^{2m-1} \left(v - C_4 v^{1-2m} \right) - C_4 a_k^o(\omega)^{-1}$$

$$\geq a_k^o(\omega)^{-1} a_k^o(\omega)^{\frac{2m-1}{2m}} \left(v - C_4 \cdot C_4^{\frac{1-2m}{2m}} \right) - C_4 a_k^o(\omega)^{-1}$$

$$= a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v - \left(\left(C_4 a_k^o(\omega)^{-1} \right)^{\frac{1}{2m}} + C_4 a_k^o(\omega)^{-1} \right)$$

(12) $$= a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v - K_k(\omega) =: r'_{k1}$$

Analog folgt

(13) $$r_{k2} \leq a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v + K_k(\omega) =: r'_{k2}$$

Aus (11), (12) und (13) erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{I_k(\omega,v)} r^{n-1}\, dr \leq \int_{r'_{k1}}^{r'_{k2}} r^{n-1}\, dr = \frac{1}{n}\,(r'^{\,n}_{k2} - r'^{\,n}_{k1})$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v + K_k(\omega)\right)^n - \left(a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v - K_k(\omega)\right)^n\right)$$

$$= K'_k(\omega)\, v^{n-1}$$

Dabei nimmt $K'_k(\omega)$ für $\omega \in \Omega$ ein positives Maximum an, weil $a_k^o(\omega)^{-1}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist. Setzen wir $u = v^{2m}$, so ist Hilfssatz 1.1. bewiesen, denn

$$B(v) \leq \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} K'_k(\omega)\, d\omega\, v^{n-1}$$

$$\leq C\, v^{n-1} = C\, u^{\frac{n-1}{2m}} \quad .$$

Fall 2: $v \leq v_o$

Weil $a_k^o(z)$ homogen vom Grade 2m ist, ergibt sich sofort

(13a) $$\left| \int_{a_k^o(z)\leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz \right| \leq \int_{a_k^o(z)\leq u} dz = C\, u^{\frac{n}{2m}}, \quad u \in R_+^1$$

Ebenso gilt

$$(13b) \quad \left| \int\limits_{a_k(z)\le u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 \, dz \right| \le C \, u^{\frac{n}{2m}} , \quad u \in R_+^1$$

Beweis für (13b):

Wegen $0 < a_k(z)$ und $a_k(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$ nimmt $a_k(z)$ ein positives Minimum a_k an, und deshalb ist für $u < a_k$

$$\int\limits_{a_k(z)=u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 \, dz \equiv 0 .$$

Für $u \ge a_k$ und mit $v^{2m} := u$ sowie wegen (9) gilt

$$\int\limits_{a_k(z)\le v^{2m}} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 \, dz \le \int\limits_{a_k(z)\le v^{2m}} dz$$

$$\le \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{r^{2m}a_k^o(\omega)\le v^{2m}+C_4 r^{2m-1}+C_4} r^{n-1} \, dr$$

und wegen (13) folgt

$$\le \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{0}^{r'_{k2}} r^{n-1} \, dr$$

$$\le C \left(a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v + K_k(\omega) \right)^n$$

$$= C \, v^n \left(a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} + K_k(\omega) \, v^{-1} \right)^n$$

Wegen $v \ge a_k^{\frac{1}{2m}}$ bleibt der Ausdruck in der Klammer beschränkt und mit $v = u^{\frac{1}{2m}}$ ist die Behauptung (13b) gezeigt.

Aus (13a) und (13b) schließen wir für $u \leq u_o$ weiter

$$\left| \int_{a_k(z)\leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz - \int_{a_k^o(z)\leq u} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz \right| \leq C\, u^{\frac{n}{2m}}$$

$$\leq C\, u_o^{\frac{1}{2m}}\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

$$\leq C'\, u^{\frac{n-1}{2m}} .$$

Damit ist auch im Fall 2 die Behauptung des Hilfssatzes gezeigt und somit alles bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 1.2.

Wir brauchen Hilfssatz 1.2. nur für große $u \in R_+^1$ zu zeigen, weil für $u \leq u_o$ die gleiche Argumentation wie im Fall 2 von Hilfssatz 1.1. angewendet werden kann.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_s(r\omega)$ den Projektionsoperator auf den Unterraum $H_s(r\omega) \subset R^N$, der von den ersten s Spaltenvektoren der Matrix $\mathfrak{M}(r\omega)$: $\mathfrak{M}_1(r\omega)$, $\mathfrak{M}_2(r\omega)$,..., $\mathfrak{M}_s(r\omega)$, $s=1,2,3,\ldots,N$, aufgespannt wird. Entsprechend bezeichne $\mathcal{P}_s^o(\omega)$ den Projektionsoperator auf $H_s^o(\omega) \subset R^N$, der von $\mathfrak{M}_1^o(\omega)$, $\mathfrak{M}_2^o(\omega)$,..., $\mathfrak{M}_s^o(\omega)$ aufgespannt wird.

Dann gilt für die Matrix $\mathcal{P}_s(r\omega) = (\mathcal{P}_s(r\omega))_{ij}$

$$(14) \qquad (\mathcal{P}_s(r\omega))_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_{ik}(r\omega)\ \overline{\mathfrak{M}_{jk}(r\omega)}$$

denn für $y = (g_1, g_2, \ldots, g_N) \in R^N$ ist

$$(\mathcal{P}_s(r\omega)\, y)_i = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_{ik}(r\omega)\ (y, \mathfrak{M}_k(r\omega)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{N} g_j \, \overline{\mathfrak{M}_{jk}(r\omega)} \, \mathfrak{M}_{ik}(r\omega)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} g_j \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_{ik}(r\omega) \, \overline{\mathfrak{M}_{jk}(r\omega)}$$

Analog ergibt sich

$$(14a) \qquad (\mathcal{P}^{o}_{s}(\omega))_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}^{o}_{ik}(\omega) \, \overline{\mathfrak{M}^{o}_{jk}(\omega)} \, .$$

Wir definieren

$$(15) \qquad v := u^{\frac{1}{2m}} \quad \text{und} \quad r_k(\omega) := a^{o}_{k}(\omega)^{\frac{-1}{2m}} \, v$$

Wegen (8) erhalten wir $r_N(\omega) \leq r_{N-1}(\omega) \leq \ldots \leq r_1(\omega)$ und formen wie folgt um

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{a^{o}_{k}(z) \leq v^{2m}} (|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 - |\mathfrak{M}^{o}_{ik}(z)|^2) \, dz \right| =$$

$$= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\Omega} d\omega \sum_{k=1}^{N} \int_{a^{o}_{k}(\omega) r^{2m} \leq v^{2m}} (|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}^{o}_{ik}(\omega)|^2) r^{n-1} dr \right|$$

$$= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\Omega} d\omega \left[\int_{0}^{r_N(\omega)} \sum_{k=1}^{N} (|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}^{o}_{ik}(\omega)|^2) \, r^{n-1} \, dr \right. \right.$$

$$+ \int_{r_N(\omega)}^{r_{N-1}(\omega)} \sum_{k=1}^{N-1} (|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}^{o}_{ik}(\omega)|^2) \, r^{n-1} \, dr$$

$$+ \quad \ldots\ldots$$

$$\vdots$$

$$+ \quad \ldots\ldots$$

$$\left. \left. + \int_{r_2(\omega)}^{r_1(\omega)} (|\mathfrak{M}_{i1}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}^{o}_{i1}(\omega)|^2) \, r^{n-1} \, dr \right] \right|$$

Auf Grund der Normierung der $\mathfrak{M}_k(r\omega)$ bzw. $\mathfrak{M}_k^o(\omega)$ gilt $\sum_{k=1}^{N}(|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^o(\omega)|^2) = 0$ für $1 \le i \le N$, und wir erhalten wegen (14) bzw. (14a)

$$(2\pi)^{-n}\Big|\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k^o(z)\le v^{2m}}(|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^o(z)|^2)\,dz$$

(16)
$$= (2\pi)^{-n}\Big|\int_{\Omega}d\omega\sum_{k=1}^{N-1}\int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)}\big((\mathfrak{P}_k(r\omega))_{ii} - (\mathfrak{P}_k^o(\omega)_{ii}\big)r^{n-1}dr$$

$$\le (2\pi)^{-n}\int_{\Omega}d\omega\sum_{k=1}^{N-1}\int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)}\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^o(\omega)\|\,r^{n-1}\,dr$$

Wir werden uns im folgenden mit der Abschätzung des Integrales

$$I_k(\omega) = \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)}\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^o(\omega)\|\,r^{n-1}\,dr$$

beschäftigen.

Die Differenz $\|\mathfrak{P}_k - \mathfrak{P}_k^o\|$ bezeichnet man als die Öffnung der Unterräume H_k und H_k^o. Nach [1] gilt

(17) $$\|\mathfrak{P}_k - \mathfrak{P}_k^o\| = \max\Big(\sup_{\substack{\|f\|=1\\ f\in H_k}}\|(\mathfrak{J} - \mathfrak{P}_k^o)f\|, \sup_{\substack{\|g\|=1\\ g\in H_k^o}}\|(\mathfrak{J} - \mathfrak{P}_k)g\|\Big) \le 1$$

Unterscheiden wir jetzt einige Fälle.

Fall 1 : $r_k(\omega) \neq r_{k+1}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Mit der Definition von $r_k(\omega) = a_k^\circ(\omega)^{\frac{-1}{2m}}$ v gilt $a_k^\circ(\omega) \neq a_{k+1}^\circ(\omega)$ und somit

(18) $\quad \left|a_k^\circ(\omega) - a_{k+1}^\circ(\omega)\right| \geq c_k \qquad$ für alle $\omega \in \Omega$.

Auf Grund von (17) können wir $\|\mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^\circ(\omega)\|$ wie folgt abschätzen. Für $y \in H_k(r\omega)$ gilt $y = \sum_{l=1}^{k} c_l \mathfrak{w}_l(r\omega)$ und $\mathcal{I}y = y = \sum_{l=1}^{N} \left(y, \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right) \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)$, und deshalb ist

$$\|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_k^\circ(\omega))y\| = \left\|\sum_{l=1}^{N} \left(y, \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)\mathfrak{w}_l^\circ(\omega) - \sum_{l=1}^{k} \left(y, \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)\mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{l=k+1}^{N} \left(y, \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right) \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{l=k+1}^{N} \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\mathfrak{w}_j(r\omega), \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right) \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right\|$$

$$\leq C \max_{\substack{l=k+1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,k}} \left|\left(\mathfrak{w}_j(r\omega), \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)\right|$$

Die andere Formel in (17) führt auf den analogen Ausdruck, so daß wir erhalten

$$(19) \quad \|\mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^\circ(\omega)\| \leq \max\left[\max_{\substack{l=k+1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,k}} \left|\left(\mathfrak{w}_j(r\omega), \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)\right|, \max_{\substack{l=k+1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,k}} \left|\left(\mathfrak{w}_l(r\omega), \mathfrak{w}_j^\circ(\omega)\right)\right|\right]$$

Weiter gilt jedoch

$$\left(r^{2m} a_l^\circ(\omega) - a_j(r\omega)\right) \left(\mathfrak{w}_j(r\omega), \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)$$

$$= \left(\mathfrak{w}_j(r\omega),\ r^{2m} a_l^\circ(\omega) \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right) - \left(a_j(r\omega)\mathfrak{w}_j(r\omega), \mathfrak{w}_l^\circ(\omega)\right)$$

$$= \left(\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{A}^\circ(r\omega)\mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right) - \left(\mathfrak{A}(r\omega)\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)$$

$$= \left(\mathfrak{A}^\circ(r\omega)\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right) - \left(\mathfrak{A}(r\omega)\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)$$

$$= \left((\mathfrak{A}^\circ(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega))\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)$$

und damit

$$\left|\left(\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)\right| = \frac{\left|\left((\mathfrak{A}^\circ(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega))\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)\right|}{\left|r^{2m}a_1^\circ(\omega) - a_j(r\omega)\right|}$$

für $r^{2m}a_1^\circ(\omega) \neq a_j(r\omega)$

$$= \frac{\left|\left((\mathfrak{A}^\circ(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega))\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)\right|}{\left|r^{2m}(a_1^\circ(\omega) - a_j^\circ(\omega)) + r^{2m}a_j^\circ(\omega) - a_j(r\omega)\right|}$$

(20)

$$\leq \frac{\left\|\mathfrak{A}^\circ(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega)\right\| \left\|\mathfrak{m}_j(r\omega)\right\| \left\|\mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right\|}{\left|r^{2m}(a_1^\circ(\omega) - a_j^\circ(\omega))\right| - \left|r^{2m}a_j^\circ(\omega) - a_j(r\omega)\right|}$$

Nun ist für genügend großes $r \in R_+^1$ und somit wegen
$v\, a_k^\circ(\omega)^{\frac{1}{2m}} < r$ für genügend großes v

$C_4\, r^{2m-1} + C_4 \leq 2\, C_4 r^{2m-1}$ und wegen (18), (8)

$$r^{2m}\left|a_1^\circ(\omega) - a_j^\circ(\omega)\right| \geq r^{2m}\left|a_{k+1}^\circ(\omega) - a_k^\circ(\omega)\right| \geq r^{2m}\, C_k$$

(21)
$$> 4C_4\, r^{2m-1} \geq 2(C_4 r^{2m-1} + C_4)$$
$$\geq 2\left|a_j^\circ(\omega) r^{2m} - a_j(r\omega)\right|$$

Es gilt also wegen (21)

$$\left|\left(\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_1^\circ(\omega)\right)\right| \leq \frac{2C_4\, r^{2m-1}}{r^{2m}\left|a_1^\circ(\omega) - a_j^\circ(\omega)\right| - \left|a_j^\circ(\omega) r^{2m} - a_j(r\omega)\right|}$$

$$\leq \frac{2C_4\, r^{2m-1}}{r^{2m}\left|a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)\right| - C_4\left(r^{2m-1}+1\right)}$$

(22)

$$\leq \frac{4C_4\, r^{2m-1}}{r^{2m}\left|a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)\right|} \leq \frac{4C_4}{C_k r} = C'_k\, r^{-1}$$

Die Ungleichung (22) gilt für alle r , r groß genug, da wegen (18) und (21) $r^{2m}a^o_1(\omega) = a_j(r\omega)$ nicht auftreten kann. Für $\left|\left\langle \mathfrak{M}_i(r\omega), \mathfrak{M}^o_j(\omega)\right\rangle\right|$ ergibt sich offensichtlich die gleiche Abschätzung (22), so daß wir aus (19) und (22) erhalten $\left\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}^o_k(\omega)\right\| \leq C_k\, r^{-1}$. Somit gilt für genügend große $v \in R^1_+$

$$\int_\Omega d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}^o_k(\omega)\right\| r^{n-1}\, dr$$

(23)

$$\leq \int_\Omega d\omega\; C'_k\left\langle \left(r_k(\omega)\right)^{n-1} - \left(r_{k+1}(\omega)\right)^{n-1}\right\rangle$$

$$\leq C_k \int_\Omega d\omega \left\langle v^{n-1}\left\langle a^o_k(\omega)^{\frac{1-n}{2m}} - a^o_{k+1}(\omega)^{\frac{1-n}{2m}}\right\rangle\right\rangle$$

$$\leq C_k\, v^{n-1}$$

Fall 2 : $r_k(\omega) = r_{k+1}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

In diesem Fall ist $a^o_k(\omega) = a^o_{k+1}(\omega)$ und

$$\int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}^o_k(\omega)\right\| r^{n-1}\, dr = 0 \leq C\, v^{n-1}$$

Fall 3 : $r_k(\omega) = r_{k+1}(\omega)$ für gewisse $\omega \in \Omega$.

Sei $v \in R_+^1$, $v\, a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} > 1$, v fest, und seien die Mengen Ω_1, Ω_{2v}, Ω_{3v} definiert wie folgt

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \left\{ \omega \in \Omega \,/\, a_{k+1}^o(\omega) = a_k^o(\omega) \right\} \\
\Omega_{2v} &:= \left\{ \omega \in \Omega \,/\, a_{k+1}^o(\omega) \neq a_k^o(\omega) \text{ und } \frac{4C_4 a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{1}{2m}}}{a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)} > v \right\} \\
\Omega_{3v} &:= \left\{ \omega \in \Omega \,/\, a_{k+1}^o(\omega) \neq a_k^o(\omega) \text{ und } \frac{4C_4 a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{1}{2m}}}{a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)} \leq v \right\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Mit diesen Definitionen können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^o(\omega) \right\| r^{n-1}\, dr = \\
&= \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_{2v}} + \int_{\Omega_{3v}} \right) d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^o(\omega) \right\| r^{n-1}\, dr \\
&= \left(\int_{\Omega_{2v}} + \int_{\Omega_{1v}} \right) d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^o(\omega) \right\| r^{n-1}\, dr \\
&=: J_1 + J_2
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Betrachten wir zuerst J_2 .

Wegen $v \leq a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{1}{2m}}\, r$ und (8) gilt

$$
r^{2m}(a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)) \geq r^{2m-1} v\, a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}} (a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)),
$$

so daß für $\omega \in \Omega_{3v}$ und wegen (9)

$$
\geq r^{2m-1} 4C_4 \geq 2(C_4 r^{2m-1} + C_4) \geq 2 \left| r^{2m} a_l^o(\omega) - a_l(r\omega) \right| \tag{26}
$$

für $1 \leq l \leq N$

Wegen (8) und (26) gilt für $l = k+1,\dots, N$, $j = 1,\dots,k$, $i = 1,\dots,N$

$$(27)\qquad r^{2m}\left|a_l^o(\omega)-a_j^o(\omega)\right| \geq r^{2m}\left|a_{k+1}^o(\omega)-a_k(\omega)\right| > 2\left|r^{2m}\, a_i^o(\omega)-a_i(r\omega)\right| .$$

Auf Grund von (20) d. h.

$$\left|\left\langle \mathfrak{M}_j(r\omega), \mathfrak{M}_l^o(\omega)\right\rangle\right| \leq \frac{C_4 r^{2m-1} + C_4}{\left|r^{2m}\left|a_l^o(\omega)-a_j^o(\omega)\right| - \left|r^{2m}a_j^o(\omega)-a_j(r\omega)\right|\right|}$$

folgt wegen $r > 1$, (27) und (9)

$$\leq \frac{2C_4 r^{2m-1}}{r^{2m}\left(a_{k+1}^o(\omega)-a_k^o(\omega)\right) - 2C_4 r^{2m-1}}$$

also wegen (26)

$$\leq \frac{4C_4\, r^{2m-1}}{r^{2m}\,(a_{k+1}^o(\omega)- a_k^o(\omega))}$$

$$= \frac{4C_4}{r\left(a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)\right)}$$

Die gleiche Ungleichung gilt für $\left|\left\langle \mathfrak{M}_i(r\omega), \mathfrak{M}_j^o(\omega)\right\rangle\right|$ $j=1,2,\dots,k$, $l=k+1,\dots,N$, und wir erhalten auf Grund von (19)

$$J_2 = \int_{\mathfrak{S}_{3v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^o(\omega)\right\| r^{n-1}\, dr \qquad \leq$$

$$\leq C \int_{\Omega_{1v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \frac{r^{n-2}\, dr}{a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)}$$

$$\leq C \int_{\Omega_{1v}} \frac{r_k^{n-1}(\omega) - r_{k+1}^{n-1}(\omega)}{a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)}\, d\omega \quad ,$$

so daß sich wegen $r_k(\omega) = v\, a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}}$ ergibt

$$= C \int_{\Omega_{1v}} v^{n-1} \frac{a_k^o(\omega)^{\frac{1-n}{2m}} - a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{1-n}{2m}}}{a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)}\, d\omega \quad .$$

Wegen $\dfrac{a_k^o(\omega)^{\frac{1-n}{2m}} - a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{1-n}{2m}}}{a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)} =$

$$= \frac{a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{n-1}{2m}} - a_k^o(\omega)^{\frac{n-1}{2m}}}{a^o_{k+1}(\omega) - a^o_k(\omega)} \left(a^o_{k+1}(\omega)\, a^o_k(\omega) \right)^{-\frac{n-1}{2m}}$$

und $\frac{n-1}{2m} > 0$ ist der Quotient im letzten Integral für alle $\omega \in \Omega$ beschränkt. Auf diese Weise erhalten wir

$$(28) \quad J_2 \leq C \int_{\Omega} d\omega\, v^{n-1} \leq C\, v^{n-1} \quad ,$$

und C ist unabhängig von v.

Abschätzung von J_1:

Für $\omega \in \Omega_{2v}$ schätzen wir $J_1 = \int_{\Omega_{1v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathcal{P}_k(r\omega) - \mathcal{P}_k^o(\omega) \right\| r^{n-1} dr$

unter Verwendung von (17) und $r_k(\omega) = v\, a_k^o(\omega)^{\frac{-1}{2m}}$ ab.

Zunächst ist

$$J_1 \leq \int_{\Omega_{2v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} r^{n-1}\, dr \quad \text{und somit}$$

$$\leq \int_{\Omega_{2v}} d\omega \; \frac{v^n}{n} \left(a_k^o(\omega)^{\frac{-n}{2m}} - a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{-n}{2m}} \right)$$

Wegen $\omega \in \Omega_{2v}$ gilt weiterhin

$$J_1 \leq \int_{\Omega_{2v}} d\omega \; \frac{v^{n-1}}{n} \left(\frac{a_k^o(\omega)^{\frac{-n}{2m}} - a_{k+1}^o(\omega)^{\frac{-n}{2m}}}{a_{k+1}^o(\omega) - a_k^o(\omega)} \right) 4C_4 a_{k+1}(\omega)^{\frac{1}{2m}}$$

Wie oben zeigt man, daß der Quotient für $\omega \in \Omega$ beschränkt bleibt, so daß

$$J_1 \leq C \int_{\Omega_{2v}} d\omega \; v^{n-1} \leq C \int_{\Omega} d\omega \, v^{n-1} \leq C\, v^{n-1} .$$

Auf Grund von (28) und (25) folgt auch in diesem Fall

$$\int_{\Omega} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega)}^{r_k(\omega)} \left\| \mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^o(\omega) \right\| r^{n-1}\, dr \leq C\, v^{n-1} .$$

Setzen wir $u^{\frac{1}{2m}} = v$, so ist zusammen mit den anderen Fällen und (16) Hilfssatz 1.2. gezeigt.

§ 3 Eine Grundlösung

Es sei $z \in R^n$ und $A(z) := \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha z^\alpha$. Wegen (4) ist $A(z)$ hermitesch, die N reellen Eigenwerte von $A(z)$ bezeichnen wir mit $a_k(z)$, $k=1,\dots,N$. Diese sind stetige Funktionen bzgl. der Komponenten der Matrix und somit auch stetig bzgl. z und wegen (3) und (5) gilt $0 < a_k(z) \to \infty$ falls $|z| \to \infty$.

Sei nun $q(z,t)$ Lösung von

$$(29) \qquad \frac{\partial}{\partial t} q(z,t) = -A(z)\, q(z,t) \quad \text{mit } q(0,z) = 1$$

Dann gilt nach [8] für $t>0$

$$(30) \qquad \mathcal{L}(x-y;t) := (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i(x-y,z)}\, q(z,t)\, dz$$

ist Grundlösung von $A + \frac{\partial}{\partial t}$, und es gelten die Abschätzungen für $0<t<T$

$$(31) \qquad \|D^\alpha \mathcal{L}(x;t)\| \le C_5\, t^{\frac{-n-|\alpha|}{2m}}\, e^{-C_6 x^{\frac{2m}{2m-1}} t^{\frac{-1}{2m-1}}}$$

C_5 und C_6 hängen von T und den Koeffizienten von A ab.

Wir wollen jetzt die Funktion $\mathcal{L}(x;t)$ näher untersuchen. Zu $A(z)$ gibt es eine unitäre Matrix $M(z) = m_{ij}(z)$, $i=1,..N$, $j=1,..,N$, so daß $\overline{M^*(z)}\, A(z)\, M(z) = (a_i(z)\delta_{ij})$. Daraus folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\overline{M^*(z)}\, A(z)\, M(z)\right)^k = \overline{M^*(z)}\, A^k(z)\, M(z) = (a_i(z)^k \delta_{ij})$$

und

$$A^k(z) = M(z)\, (a_i(z)^k \delta_{ij})\, \overline{M^*(z)} .$$

Wir erhalten somit für $q(z,t)$, das bekanntermaßen die Darstellung $q(z,t) = e^{-t\,A(z)}$ hat,

$$q(z,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^l}{l!} \sum_{k=1}^{N} m_{ik}(z)\,\overline{m_{jk}(z)}\,a_k(z)^l$$

(32)
$$= \sum_{k=1}^{N} m_{ik}(z)\,\overline{m_{jk}(z)}\,e^{-a_k(z)\,t}$$

Für die Anwendung des Taubersatzes ist es notwendig, die Grundlösung $\mathcal{L}(x-y;t)$ als Laplace-Stieltjes Integral darzustellen. Dies gelingt mit der im folgenden definierten Funktion $\mathcal{R}(x-y,u)$.

Für $x,y \in R^n$, $u>0$ sei

(33) $$\mathcal{R}_{ij}(x-y,u) := (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k(z)\le u} m_{ik}(z)\,\overline{m_{jk}(z)}\,e^{i(x-y,z)}\,dz$$

Es gilt

(34) $\mathcal{R}(x-y,u)$ ist auf jedem endlichen u-Intervall von beschränkter Totalvariation.

Denn sei $s_0<s_1<\ldots<s_m$ eine Unterteilung eines Intervalles $[0,v]$ der u-Achse, so folgt

$$\sum_{l=1}^{m} \left|\mathcal{R}_{ij}(x-y,s_l) - \mathcal{R}_{ij}(x-y,s_{l-1})\right| =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{s_{l-1}\le a_k(z)\le s_l} m_{ik}(z)\overline{m_{jk}(z)}\,e^{i(x-y,z)}\,dz \right|$$

$$\le \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{s_{l-1}\le a_k(z)\le s_l} dz$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{0<a_k(z)\le v} dz$$

Dabei haben wir benutzt, daß $|m_{ik}(z)|<1$, $1\le i,k\le N$.

Beweisen wir jetzt die Darstellung von $\mathcal{L}(x-y;t)$ als Laplace-Stieltjes Integral.

Hilfssatz 2.1.

Seien $x,y \in R^n$, $u \in R_+^1$ sowie $\mathcal{R}(x-y,u)$ wie in (33) definiert. Dann gilt für die Grundlösung $\mathcal{L}(x-y;t)$ für $t>0$:

$$(35) \qquad \mathcal{L}(x-y;t) = \int_0^\infty e^{-ut}\, d\mathcal{R}(x-y,u)$$

Beweis:

Wie im Beweis zu (13b) zeigt man, daß $|\mathcal{R}(x-y,u)| \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$, $u>0$; also existiert wegen (34) das Integral in (35), und es gilt

$$\int_0^\infty e^{-ut}\, d\mathcal{R}_{ij}(x-y,u) = t \int_0^\infty e^{-ut}\, \mathcal{R}_{ij}(x-y,u)\, du$$

$$= \sum_{k=1}^{N} t \int_0^\infty e^{-ut} (2\pi)^{-n} \int_{a_k(z)\le u} \mathcal{M}_{ik}(z)\, \overline{\mathcal{M}_{jk}(z)}\, e^{i(x-y,z)}\, dz\, du$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} t \int_{R^n} \mathcal{M}_{ik}(z)\, \overline{\mathcal{M}_{jk}(z)}\, e^{i(x-y,z)} \int_{u\ge a_k(z)} e^{-ut} du\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} t \int_{R^n} \mathcal{M}_{ik}(z)\, \overline{\mathcal{M}_{jk}(z)}\, e^{i(x-y,z)} \left[-\frac{1}{t} e^{-ut} \right]_{a_k(z)}^{\infty} dz$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \mathcal{M}_{ik}(z)\, \overline{\mathcal{M}_{jk}(z)}\, e^{i(x-y,z)}\, e^{-a_k(z)\, t}\, dz$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i(x-y,z)} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{M}_{ik}(z)\, \overline{\mathcal{M}_{jk}(z)}\, e^{-a_k(z)\, t}\, dz$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i(x-y,z)}\, q_{ij}(z,t)\, dz = \mathcal{L}_{ij}(x-y;t)$$

Dabei haben wir (32) verwandt.

§ 4 Die exponentielle Abschätzung

Es sei $b \in C^\infty(R^n)$ gewählt mit

$$b(x) = 1 \quad \text{für} |x| < 1$$

$$b(x) = 0 \quad \text{für} |x| > 2$$

wir definieren für $\rho > 0$ (ρ beliebig, jedoch $G_{3\rho} \neq \Phi$)

$$(36) \quad \mathcal{H}_\rho(x,y;s,t) := b\left(\frac{x-y}{\rho}\right) \mathcal{L}(x,y;s,t)$$

und wollen jetzt eine Abschätzung des kompensierenden Anteils der Green'schen Funktion beweisen.

Hilfssatz 2.2.

Für $x \in G$, $y \in G_{3\rho}$, $0 < s-t < C_7 \rho^{2m}$ gilt die Abschätzung

$$\left| g_\rho(x,y;s,t) - \mathcal{H}_\rho(x,y;s,t) \right| \leq C_8 (s-t)^{\frac{-n}{2m}} e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}}} (s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}$$

Beweis:

Wir untersuchen zuerst die Distribution

$$\mathcal{K}(x,y;s,t) = \left(A(D) + \frac{\partial}{\partial s}\right)\left(g_\rho(x,y;s,t) - \mathcal{H}_\rho(x,y;s,t)\right)$$

$$= \delta(x-y)\,\delta(s-t) - \delta(x-y)\,\delta(s-t) - \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} \frac{\rho^{-|\alpha|}}{\alpha!} (D_x^\alpha b)\left(\frac{x-y}{\rho}\right) \gamma^\alpha(D)\, \mathcal{L}(x,y;s,t)$$

wobei $\gamma^\alpha(D)$ eine Matrix ist, deren Komponenten Differentialausdrücke der Ordnung $2m-|\alpha|$ sind.

Verwenden wir nun die Abschätzung (31) und beachten, daß $(D_x^\alpha b)\left(\frac{x-y}{\rho}\right) \neq 0$ nur für $1 \leq \frac{x-y}{\rho} \leq 2$, so ergibt sich

$$\left|\mathcal{K}(x,y;s,t)\right| \leq C\,(s-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}}} (s-t)^{\frac{-1}{2m-1}} \times$$

$$\times \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} \frac{\rho^{-|\alpha|}}{\alpha!} (s-t)^{\frac{\alpha}{2m}} \left|(D_x^\alpha b)\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\right|,$$

und mit der Beschränktheit von $\left|\frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha b\right|$ folgt

$$(37)\quad \left|\mathfrak{K}(x,y;s,t)\right| \leq C\,(s-t)^{\frac{-2m-n}{2m}}\, e^{-C\,\rho^{\frac{2m}{2m-1}}\,(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} \times$$

$$\times \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} C\,\rho^{-|\alpha|}\,(s-t)^{\frac{\alpha}{2m}}$$

für $(x,y)\in G\times G$, $0<s-t<T$.

Die Funktionen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{K}$ bestimmen in bekannter Weise Operatoren $C_0^\infty(G_{3\rho}) \to C^\infty(G)$ bzw. $C_0^\infty(G_{3\rho}) \to C_0^\infty(G)$, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen. Für $\varphi\in C_0^\infty(G_{3\rho})$ ist dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}\varphi &= \mathfrak{G}\left(A + \frac{\partial}{\partial s}\right)\varphi\\ &= \mathfrak{G}\left(\left(A + \frac{\partial}{\partial s}\right)\mathfrak{G}\varphi - \mathfrak{K}\varphi\right)\\ &= \mathfrak{G}(\varphi - \mathfrak{K}\varphi)\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $x\in G$, $y\in G_{3\rho}$, $0<s-t<T$ die Identität

$$(38)\quad \mathfrak{G}(x,y;s,t) - \mathfrak{h}(x,y;s,t) = \int_t^s dt' \int_G \mathfrak{G}(x,x';s,t')\,\mathfrak{K}(x',y;t',t)\,dx'$$

Wegen $y\in G_{3\rho}$ und $\mathfrak{K}(x',y;t',t) \neq 0$ nur für $\rho<|x'-y|<2\rho$ erstreckt sich das Gebietsintegral in (38) nur über den Ring R_y^ρ um y mit $R_y^\rho = \left\{ x' \,\middle|\, \rho\leq|x'-y|\leq 2\right\}$.

Zur weiteren Abschätzung des Integrales in (38) verwenden wir (37) und (6) und erhalten wegen $0<s-t<C_7\rho^{2m}$

$$\left|\mathfrak{G}(x,y;s,t) - \mathfrak{h}(x,y;s,t)\right| \leq$$

$$\leq C \int_t^s dt' \int_{R_y^\rho} (s-t')^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-\delta\left(\frac{|x-x'|}{(s-t')^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}}\, e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}}(t'-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} \times$$

$$\times \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} C_\alpha\,\rho^{-|\alpha|}\,(t'-t)^{\frac{\alpha}{2m}}\,dx'$$

$$\leq C \int_t^s dt' \int_{R_y^\rho} (s-t')^{\frac{-n}{2m}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\left[\left(\frac{|x-x'|}{(s-t)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} + \left(\frac{\rho}{(t'-t)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}\right]} dx$$

Sei $K_x = \{x' \in G \mid |x'-x| \leq \rho\}$ der Kreis um den Punkt x mit Radius ρ und CK_x das Komplement von K_x bzgl. G. Wir spalten das obige Integral I auf in $= I_1 + I_2$, wobei wir bei I_1 über $K_x \cap R_y^\rho$ integrieren bei I_2 über $CK_x \cap R_y^\rho$.

Abschätzung von I_1:

$$I_1 \leq C \int_t^s (s-t')^{\frac{-n}{2m}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}} (t'-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} dt' \times$$

$$\times \int_{K_x \cap R_y} e^{-C|x-x|^{\frac{2m}{2m-1}} (s-t')^{\frac{-1}{2m-1}}} dx$$

$$\leq C \int_t^s (\quad " \quad) dt' \; C \int_0^\rho e^{-C\, r^{\frac{2m}{2m-1}} (s-t')^{\frac{-1}{2m-1}}} r^{n-1} dr$$

Mit der Transformation $u(r) = C\,(s-t')^{\frac{-1}{2m-1}} r^{\frac{2m}{2m-1}}$ können wir das r- Integral folgendermaßen abschätzen

$$\int_0^\rho e^{-C\, r^{\frac{2m}{2m-1}} (s-t')^{\frac{-1}{2m-1}}} r^{n-1} dr =$$

$$= \frac{2m-1}{2m} \left[(s-t')^{\frac{1}{2m}} C^{\frac{-2m+1}{2m}}\right]^n \int_0^{u(\rho)} u^{\frac{(n-1)(2m-1)}{2m}} u^{\frac{-1}{2m}} e^{-u} du$$

$$\leq C\,(s-t')^{\frac{n}{2m}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{(n-1)(2m-1)-1}{2m}} du$$

$$\leq C\,(s-t')^{\frac{n}{2m}} .$$

Wir erhalten also

$$I_1 \leq C \int_t^s (s-t')^{\frac{-n}{2m}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}(t'-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} (s-t')^{\frac{n}{2m}} dt'$$

$$= C \int_0^{s-t} v^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\varrho^{\frac{2m}{2m-1}} v^{\frac{-1}{2m-1}}} dv$$

Da der Integrand monoton wächst für $0<v \leq \left(\frac{2mC\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m-1)(n+2m)}\right)^{\frac{1}{2m-1}}$

$= C_7\varrho^{2m}$, können wir für diese v weiter abschätzen

$$(39) \qquad I_1 \leq C (s-t)^{\frac{-n}{2m}} e^{-C\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} .$$

Abschätzung von I_2:

$$I_2 \leq C \int_t^s dt' \int_{CK_x \cap R_y} (s-t')^{\frac{-n}{2m}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\left[\left(\frac{|x-x'|}{(s-t')^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} + \left(\frac{\varrho}{(t'-t)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}\right]} dx$$

$$\leq C \int_t^s (s-t')^{\frac{-n}{2m}} (t'-t)^{\frac{-2m-n}{2m}} e^{-C\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}\left[\left(\frac{1}{s-t}\right)^{\frac{1}{2m-1}} + \left(\frac{1}{t'-t}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right]} dt' \, C\varrho^n$$

$$\leq C\varrho^n \left[\int_t^s (\quad\text{''}\quad)^2 dt'\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_t^s (\quad\text{''}'\quad)^2 dt'\right]^{\frac{1}{2}}$$

wobei die letzte Zeile wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt. Für $0<s-t<C_7\varrho^{2m}$ können wir wie oben schließen und erhalten

$$I_2 \leq C\varrho^n (s-t)^{\frac{-n}{2m}+\frac{1}{2}} e^{-C\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} (s-t)^{\frac{-m-n}{2m}} e^{-C\left(\frac{\varrho}{(s-t)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}}$$

$$\leq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-C\,\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}} \left(\frac{\varrho}{s-t^{\frac{1}{2m}}}\right)^{n} e^{-C\left(\frac{\varrho}{(s-t)^{\frac{1}{2m}}}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}}$$

$$\leq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-C\,\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}}\ (s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}$$

da $x^n\, e^{-C\,x^{\frac{2m}{2m-1}}}$ für alle $x \geq 0$ beschränkt bleibt.

Wir erhalten also für $0<s-t<C_7\varrho^{2m}$:

$$(40) \qquad I_2 \leq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-C\,\varrho^{\frac{2m}{2m-1}}}\,(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}\,.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\left|g(x,y;s,t) - \mathfrak{g}(x,y;s,t)\right| = I_1 + I_2$$

sowie (39) und (40) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 2.2.

Damit ist auch Satz 2 bewiesen, denn mit $l(y) =: 3\varrho$ und wegen $b(0) = 1$ ist er eine unmittelbare Folgerung aus den Hilfssätzen 2.1. und 2.2. sowie (7).

§ 5 Beweis von Satz 3

Die in Satz 2 hergeleiteten Ergebnisse ermöglichen es uns nun, die gewünschten Ergebnisse über das asymptotisch Verhalten der Spektralfunktion $\sum_{\lambda_k \le u} \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(y)}$ zu gewinnen. Bei dem Beweis werden wir wesentlich einen Taubersatz von Avakumovic[5] verwenden, der im folgenden Paragraphen bewiesen wird. Wir verwenden den Taubersatz in folgender Form.

Taubersatz 5.1.

Es sei $D : R_+^1 \to R_+^1$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

V1 D ist lokal von beschränkter Schwankung.

V2 $D(u) = O(u^n)$ für $u \to \infty$, $n \in N$.

V3 Es gibt eine Konstante $C_0 > 0$, so daß für $0 < u \le v \le u+1$ gilt
$D(v^{2m}) - D(u^{2m}) > -C_0\, u^{n-1}$.

V4 $\left| \int_0^\infty e^{-tu}\, dD(u) \right| \le C\, t^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-C_{10} t^{\frac{-1}{2m-1}}}$ für $0 < t < C_{10}^{2m-1}$

V5 $\left| \int_0^\infty e^{-tu}\, dD(u) \right| \le C\, t^{\frac{-n}{2m}}$ für $C_{10}^{2m-1} < t$

Behauptung:
Für $v \ge C_m C_{10}^{\frac{-2m+1}{2m}}$ gilt: $\left| D(v^{2m})\, v^{1-n} \right| \le C\, C_{10}^{\frac{-2m+1}{2m}}$.

Zur Übertragung auf unseren Fall setzen wir für $y \in G$, $u > 0$ mit $\mathcal{E}(y,y,u) = \sum_{\lambda_k < u} \varphi_k(y)\,\overline{\varphi_k(y)}$

$$D_i(y,u) := \mathcal{E}_{ii}(y,y,u) - \mathcal{R}_{ii}(0,u) \quad , \; 1 \le i \le N.$$

Dann gilt:

(41) $\left| D_i(y,u) \right| \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$ und damit auch

(42) $$\left|\int_0^\infty e^{-tu}\, dD_i(y,u)\right| \le C\, t^{\frac{-n}{2m}}$$

Beweis für (41):

Im Beweis für Hilfssatz 2.1. war $|\mathcal{R}_{ij}(0,u)| \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$, $u>0$, gezeigt worden, und wir erhalten also

$$\begin{aligned}
|D_i(y,u)| &= |\mathcal{E}_{ii}(y,y,u) - \mathcal{R}_{ii}(0,u)| \\
&= \Big|\sum_{\lambda_k \le u} (\pi_k(y)\,\overline{\pi_k^*(y)})_{ii}\Big| + C\, u^{\frac{n}{2m}} \\
&\le e\Big|\sum_{\lambda_k \le u} e^{-\frac{\lambda_k}{u}} (\pi_k(y)\,\overline{\pi_k^*(y)})_{ii}\Big| + C\, u^{\frac{n}{2m}} \\
&\le e\left|g_{ii}\left(y,y,\tfrac{1}{u}\right)\right| + C\, u^{\frac{n}{2m}}\,.
\end{aligned}$$

Wegen (6) folgt für $u>\frac{1}{T}$ $|D_i(y,u)| \le C\, u^{\frac{n}{2m}} + C\, u^{\frac{n}{2m}} \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$.

Außerdem ist $\mathcal{E}_{ii}(y,u) = 0$ für $u<\lambda_1$ ($\lambda_1>0$) und $\|\mathcal{R}(0,u)\| \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$ für alle $u>0$ erfüllt, so daß wir $|D_i(y,u)| \le C\, u^{\frac{n}{2m}}$ erhalten, wenn wir nur $T>\frac{1}{\lambda_1}$ wählen.

Also sind wegen (5) und (34) Voraussetzung V1, wegen (41) Voraussetzung V2, wegen Satz 2 Voraussetzung V4 und wegen (42) Voraussetzung V5 des Taubersatzes erfüllt. Es bleibt noch die Tauberbedingung V3 zu zeigen.

Wir erhalten auf Grund der Monotonie von $\mathcal{E}_{ii}(\cdot,\cdot,u)$

$$\begin{aligned}
&D_i(\cdot,v^{2m}) - D_i(\cdot,u^{2m}) \\
&= \left[\mathcal{E}_{ii}(\cdot,\cdot,v^{2m}) - \mathcal{R}_{ii}(0,v^{2m})\right] - \left[\mathcal{E}_{ii}(\cdot,\cdot,u^{2m}) - \mathcal{R}_{ii}(0,u^{2m})\right] \\
&\ge -\left(\mathcal{R}_{ii}(0,v^{2m}) - \mathcal{R}_{ii}(0,u^{2m})\right) \\
&= -\Big(\mathcal{R}_{ii}(0,v^{2m}) - \sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n} \int_{a_k^o z \le v^{2m}} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n} \int_{u^{2m} \le a_k^o z \le v^{2m}} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz + \sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n} \int_{a_k^o z \le u^{2m}} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz - \\
&\quad - \mathcal{R}_{ii}(0,u^{2m})\Big)
\end{aligned}$$

Wegen Hilfssatz 1.1., (33) und $\int\limits_{u^{2m}\le a_k^o(z)\le v^{2m}} |\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 dz \le C(v^n-u^n)$

ergibt sich schließlich

$$D_i(\cdot,v^{2m}) - D_i(\cdot,u^{2m}) \ge -\left(Cv^{n-1} + C(v^n-u^n) + Cu^{n-1}\right) \ge -C_0\, u^{n-1}$$

für alle $u\le v\le u+1$, da $D_i(\cdot,u)$ für kleine u identisch gleich Null ist.

Also sind alle Voraussetzungen des Taubersatzes erfüllt, und wir erhalten für $v \ge C_m C_{10}^{-\frac{2m-1}{2m}} = C\, l(y)^{-1}$ (siehe Satz 2)

$$(43) \qquad D_i(y,u) \le \frac{C}{l(y)}\, v^{\frac{n-1}{2m}} .$$

Wegen (41) ist diese Ungleichung auch für $v \le \frac{C}{l(y)}$ erfüllt.

Unter Verwendung von Satz 1 und (43) erhalten wir nun für

$u>0$, $K_1 := (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{a_k^o(z)\le 1} |\mathfrak{M}_{ik}^o(z)|^2\, dz$

$$\left|\mathfrak{k}_{ii}(y,y;u) - K_1 u^{\frac{n}{2m}}\right| \le \left|\mathfrak{k}_{ii}(y,y;u) - \mathfrak{R}_{ii}(0,u)\right| + \left|\mathfrak{R}_{ii}(0,u) - K_1 u^{\frac{n}{2m}}\right|$$

$$\le \frac{C}{l(y)}\, u^{\frac{n-1}{2m}} + C\, u^{\frac{n-1}{2m}}$$

$$\le \frac{C}{l(y)}\, u^{\frac{n-1}{2m}} ,$$

denn es war $l(y) \le 1$ vorausgesetzt. Damit ist die Behauptung von Satz 3 gezeigt.

§ 6 Der Taubersatz

Der Beweis des in § 5 verwendeten Taubersatzes beruht wesentlich auf der Idee von Avakumovic, aus der Abschätzung $L(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, dA(u) = O(e^{-t^{\frac{-1}{m-1}}})$, $t\to 0$, $m\geq 2$ ein reguläres Verhalten von $\overset{*}{L}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, A(u^m)\, du$ in $s=0$ herzuleiten und anschließend Sätze von Ingham und Karamata zu verwenden [5]. Formulieren wir jetzt den Taubersatz in der allgemeinen Fassung.

Taubersatz 6.1.

Es sei $A : R_+^1 \to R_+^1$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

V1 A ist lokal von beschränkter Schwankung.

V2 $A(u) = O(u^n)$ für $u\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$.

V3 Für $m\geq 2$ gibt es Konstanten $l\geq 1$ und $C_0>0$, so daß für $0<u<v<u+1$ gilt: $A(v^m) - A(u^m) > -C_0\, u^{l-1}$.

Für ϱ, p, $q\in R_+^1$ gelte

V4 $\left|\int_0^\infty e^{-tu}\, dA(u)\right| \leq \frac{C}{t^p}\, e^{-\varrho\, t^{\frac{-1}{m-1}}}$ für $0<t<\varrho^{m-1}$,

V5 $\left|\int_0^\infty e^{-tu}\, dA(u)\right| \leq \frac{C}{t^q}$ für $\varrho^{m-1} \leq t$

Behauptung:

Sei $K = C_m\left[\varrho^{(1+mq)\frac{1-m}{m}} + \varrho^{(1+mp)\frac{1-m}{m}}\right]$, dann gilt für $v\geq C_m \varrho^{\frac{-m+1}{m}}$

$$\left|A(v^m)\, v^{1-l}\right| \leq C\left[K\, \varrho^{\frac{m-1}{m}l} + C_0\, \varrho^{\frac{1-m}{m}}\right]$$

Wir wollen diesen Satz zurückführen auf den folgenden Taubersatz[6]:

Taubersatz 6.2.

Es sei $B : R_+^1 \to R_+^1$ eine Funktion mit den Eigenschaften V1, V2 aus Satz 6.1. sowie

V3' Es gibt eine Konstante $C_0 > 0$, so daß für $0 < u < v < u+1$ gilt $B(v) - B(u) \geq C\, u^{j-1}$, $j \geq 1$.

V4' Für $\operatorname{Re} s > 0$ existiert $\varphi(s) := \int_0^\infty e^{-su} B(u)\, du$ und besitzt im Kreis $|s| \leq K_2$ eine analytische Fortsetzung, die dort der Ungleichung $|\varphi(s)| \leq K_3$ genügt.

Behauptung:

Für $u \geq \frac{\pi}{K_2}$ gilt die Ungleichung

$$|B(u)\, u^{1-j}| \leq C \left((K_2)^j K_3 + \frac{C_0}{K_2} \right)$$

Setzen wir $B(u) = A(u^m)$, so ergibt sich der Taubersatz 6.1. unmittelbar aus Satz 6.2. unter Berücksichtigung des folgenden Lemma.

Lemma

Unter den Voraussetzungen V1, V2, V4, und V5 gilt:

Die Funktion $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sv} A(v^m)\, dv$ läßt sich in den Kreis $|s| \leq \left(\frac{\varrho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ analytisch fortsetzen und genügt dort der Ungleichung

$$|\varphi(s)| \leq K_3 := C_m \left[\varrho^{(mq+1)\frac{1-m}{m}} + \varrho^{(mp+1)\frac{1-m}{m}} \right]$$

Der Beweis des Lemma stützt sich auf den folgenden Hilfssatz, den wir in [5] finden.

Hilfssatz

Für $m \geq 2$ und positive z sei

$$\chi_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} z^{-w} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma\left(\frac{m+w-1}{m}\right)}\, dw \quad , \quad \varepsilon > 0 \, .$$

Dann ist $\chi_0(z)$ eine ganze Funktion und genügt der Ungleichung

$$|\chi_0(z)| \leq C_m e^{(m-1)\left(\frac{|z|}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}}}$$

Zum Beweis sei angemerkt, daß mit der in [5] eingeführten Funktion $\chi(z)$ gilt $\chi_0(z) = \frac{1}{z}\chi(z)$. Wie dort zeigt man, daß $\chi_0(z)$ eine ganze Funktion ist und insbesondere der obigen Abschätzung genügt.

Wir beweisen im weiteren das Lemma.

Beweis für das Lemma:

Mit der oben eingeführten ganzen Funktion $\chi_0(z)$ und $L(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, dA(u)$ definieren wir

$$(44) \qquad \overset{*}{L}(s) := \int_0^\infty \chi_0\left(\frac{s}{t}\right) L(t^m)\, t^{-2}\, dt$$

und zeigen

a) $\overset{*}{L}(s)$ ist regulär in $|s| \leq \left(\frac{\varrho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$.

b) In $|s| \leq \left(\frac{\varrho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ gilt die Ungleichung

$$|\overset{*}{L}(s)| \leq C_m\left[\varrho^{(mq+1)\frac{1-m}{m}} + \varrho^{(mp+1)\frac{1-m}{m}}\right].$$

c) Für $0<s\leq\left(\frac{\varrho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ läßt sich $\overset{*}{L}(s)$ darstellen durch

$$\overset{*}{L}(s) = \int_0^\infty e^{-sv}\, A(v^m)\, dv .$$

Beweis für a) und b):

$$\overset{*}{L}(s) = \left(\int_0^{\varrho^{\frac{m-1}{m}}} + \int_{\varrho^{\frac{m-1}{m}}}^\infty\right) \chi_0\left(\frac{s}{t}\right) L(t^m)\, t^{-2} = I_1 + I_2$$

Abschätzung von I_1:

$$|I_1| \leq \int_0^{\varrho^{\frac{m-1}{m}}} \left|\chi_0\left(\frac{s}{t}\right) L(t^m)\right| t^{-2}\, dt \leq$$

$$\leq C_m \int_0^{\rho^{\frac{m-1}{m}}} e^{(m-1)\left|\frac{s}{t^m}\right|^{\frac{m}{m-1}}} \cdot e^{-\rho t^{\frac{-m}{m-1}}} \, t^{-2-mp} \, dt$$

$$\leq C_m \int_0^{\rho^{\frac{m-1}{m}}} e^{\left[(m-1)\left|\frac{s}{t^m}\right|^{\frac{m}{m-1}} - \rho\right] t^{\frac{-m}{m-1}}} \, t^{-2-mp} \, dt$$

Wegen $|s| \leq \left(\frac{\rho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ ergibt sich

$$|I_1| \leq C_m \int_0^{\rho^{\frac{m-1}{m}}} e^{\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}} - 1\right] \rho t^{\frac{-m}{m-1}}} \, t^{-2-mp} \, dt$$

Mit $t = \frac{1}{\tau}$ folgern wir weiter

$$|I_1| \leq C_m \int_{\rho^{-\frac{m-1}{m}}}^{\infty} e^{\rho \tau^{\frac{m}{m-1}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}} - 1\right]} \, \tau^{-2+2+mp} \, d\tau \quad ,$$

und wenn wir $\rho \tau^{\frac{m}{m-1}} = t$ substituieren, so erhalten wir

$$|I_1| \leq C_m \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{m-1}{m} + \frac{m-1}{m}mp} \int_0^{\infty} e^{t\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}} - 1\right]} \, t^{mp\frac{m-1}{m}} \, dt$$

$$\leq C_m \left(\frac{1}{\rho}\right)^{(1+mp)\frac{m-1}{m}} \tag{45}$$

Abschätzung von I_2:

$$|I_2| \leq \int_{\rho^{\frac{m-1}{m}}}^{\infty} \left|\chi_0\left(\frac{s}{t}\right) L(t^m)\right| t^{-2} \, dt$$

$$\leq C_m \int_{\rho^{\frac{m-1}{m}}}^{\infty} e^{(m-1)\left(\frac{|s|}{t^m}\right)^{\frac{m}{m-1}}} \, t^{-2-mq} \, dt$$

$$\leq C_m \int_{\rho^{\frac{m-1}{m}}}^{\infty} e^{\frac{\rho}{m}} \, t^{\frac{-m}{m-1}} \, t^{-2-mq} \, dt$$

$$\leq C_m \rho^{\frac{m-1}{m}} \cdot \rho^{-\frac{m-1}{m}(1+mq)} \int_0^1 e^{\frac{u}{m}} \, u^{(1+mq)\frac{m-1}{m} - 1} \, du$$

$$\leq C_m \rho^{-\frac{m-1}{m}(1+mq)} \tag{46}$$

Auf Grund von (45), (46) erhalten wir: Für $|s| \leq \left(\frac{\rho}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ konvergieren alle Integrale gleichmäßig und absolut.

Also ist $\overset{*}{L}(s)$ in $|s| \leq \left(\frac{\delta}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ regulär, und es gilt b).

Beweis für c):

Wir betrachten $0<s<\left(\frac{\delta}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ und setzen $L(t^m) = t^m \int_0^\infty e^{-ut^m} A(u)du$ in (44) ein und erhalten

$$\overset{*}{L}(s) = \int_0^\infty \chi_0\left(\frac{s}{t}\right) L(t^m)\, t^{-2}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \chi_0\left(\frac{s}{t}\right) \int_0^\infty A(u)\, e^{-ut^m}\, du\, t^{m-2}\, dt$$

$$= \int_0^\infty A(u) \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^{-w} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma\left(\frac{m+w-1}{m}\right)}\, dw\, e^{-u\,t^m}\, t^{m-2}\, dt\, du$$

$$= \int_0^\infty A(u)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} s^{-w} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma\left(\frac{m+w-1}{m}\right)} \int_0^\infty e^{-u\,t^m}\, t^{m+w-2}\, dt\, dw\, du$$

$$= \left(\int_0^\infty \text{''} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \text{''}\right) \int_0^\infty \frac{1}{m} e^{-x} \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{m+w-2+1}{m}} x^{-1} dx\, dw\, du$$

$$= \left(\int_0^\infty \text{''} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \text{''}\right) \frac{1}{m}\, u^{\frac{1-w-m}{m}} \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\frac{w-1}{m}}\, dx\, dw\, du$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^\infty A(u)\, u^{\frac{1-m}{m}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left(s\, u^{\frac{1}{m}}\right)^{-w} \Gamma(w)\, dw\, du$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^\infty A(u)\, u^{\frac{1-m}{m}}\, e^{-s\, u^{\frac{1}{m}}}\, du$$

$$= \int_0^\infty A(u^m)\, e^{-su}\, du\ .$$

Also ist die im Punkt s=0 reguläre Funktion $\overset{*}{L}(s)$ für s>0 als konvergentes Laplace-Integral darstellbar, das somit die analytische Fortsetzung von $\overset{*}{L}(s)$ in der rechten Halbebene darstellt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit bin ich meinem Lehrer, Herrn Professor V.G. Avakumović, zu Dank verpflichtet. Ferner möchte ich Herrn Professor Gromes für zahlreiche Diskussionen danken.

Literaturverzeichnis

[1] Achieser, N.I. u. Glasman, I.M. : Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, Berlin 1954.

[2] Agranovich, M.S. u. Vishik, M.I. : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Uspehi Mat. Nauk 19, no.3 (117), 53-161 (1964). Russian Math. Surveys 19, no.3, 53-157 (1964).

[3] Avakumović, V.G. : Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. Publ. Math. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 4 (1952), 95-96.

[4] Avakumović, V.G. : Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. 65 (1956), 327-344.

[5] Avakumović, V.G. : Einige Sätze über Laplace'sche Integrale. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.3, 287-3o4 (1950).

[6] Avakumović, V.G. : Seminar über elliptische Eigenwertprobleme. Ausarbeitung Aachen, 1961.

[7] Carleman, T. : Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. Attonde skand. mathematikerkongressen i Stockholm 1934, 34-44

[8] Eidel'man, S.D. : Parabolic systems. North-Holland Publ. Comp. Wolters-Noordhoff Publ., 1969.

[9] Garding, L.: On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a selfadjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator. Kungl. fysiogrfiska Sällsk. i Lund Förh. 24 (1954).

[10] Greiner, P.: An asymptotic expansion for the heat equation. Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 163-218, (1971).

[11] Gromes, W.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion elliptischer Systeme. Math. Z. 118, 254-270 (1970).

[12] Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121, 193-218 (1968).

[13] Hörmander, L.: Linear partial differential operators. 3. Aufl. Berlin: Springer 1969.

Lebenslauf

Am 8. September 1944 wurde ich als Sohn des Bauingenieurs Ernst Oetken und seiner Ehefrau Auguste, geb. Blumenstein, in Kahl/Main geboren. Nach dem Tode meiner Eltern wurde ich am 6. Oktober 1948 von dem Schlossermeister Wilhelm Brübach und dessen Ehefrau Anneliese, geb. Stötzer, wohnhaft in Kassel adoptiert.

Ab 1951 besuchte ich die Volksschule und anschließend die Goetheschule in Kassel, wo ich am 18. 2. 1964 das Abitur ablegte.

1964 begann ich an der Philipps-Universität Marburg das Studium der Mathematik und Physik und wechselte 1966 für ein Jahr an die Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br.. 1967 kehrte ich an die Marburger Universität zurück und legte dort am 27. November 1969 das Staatsexamen in den Fächern Mathematik und Physik ab.

Seit dem 1. Dezember 1969 bin ich wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Avakumović, Doebner, Görtler, Morgenstern, H.A.Schmidt, Wirsing, Wolter.